3.6. HOMOMORFİZMALAR:

Bu kesimde bir gruptan diğerine grupların cebirsel yapısını koruyan fonksiyonlar üzerinde duracağız.

Tanım 3.6.1. $(G,*)$ ve $(H,\square)$ iki grup ve $f:G\to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a,b\in G$ için $f(a*b)=f(a)\square f(b)$ ise f fonksiyonuna G den H ye **bir homomorfizma (grup homomorfizması)** denir.

Not: $f:G\to H$, $\forall a\in G$ için $f(a)=e_H$ ile tanımlı f fonksiyonu bir homomorfizmadır (Nedeni ÖDEV). Bu homomorfizmaya **aşikar homomorfizma** denir.

Örnek: $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$, $x\to f(x)=5^x$ ile tanımlı f fonksiyonu verilsin. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ için $f(x+y)=5^{x+y}=5^x\cdot 5^y=f(x)\cdot f(y)$ olduğundan f bir homomorfizmadır.

Örnek: $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z}_n,+)$, $a\to f(a)=\overline{a}$ ile tanımlı f fonksiyonu verilsin. $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ için $f(x+y)=\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}=f(x)+f(y)$ olduğundan f bir homomorfizmadır.

Teorem 3.6.2. $f:G\to H$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde

(i) $f(e_G)=e_H$ ve

(ii) $\forall a\in G$ için $f\left(a^{-1}\right)=f(a)^{-1}$ olur.

İspat: (i) $e_G=e_Ge_G$ olduğundan $f(e_G)=f(e_Ge_G)$ olup f bir homomorfizma olduğundan $f(e_G)=f(e_Ge_G)=f(e_G)f(e_G)$ olur. $f(e_G)f(e_G)=f(e_G)=f(e_G)e_H$ olduğundan kısaltma özelliğinden $f(e_G)=e_H$ olup istenen elde edilir.

(ii) Herhangi $a\in G$ alalım. $aa^{-1}=e_G$ olduğundan $f\left(aa^{-1}\right)=f(e_G)$ olup f bir homomorfizma olduğundan $f(e_G)=f\left(aa^{-1}\right)=f(a)f\left(a^{-1}\right)$ olur. (i) şıkkından $f(e_G)=e_H$ olur. O halde $f(a)f\left(a^{-1}\right)=f(e_G)=e_H$ olup $f(a)^{-1}f(a)f\left(a^{-1}\right)=f(a)^{-1}e_H=f(a)^{-1}$ olur.

Burada $f(a)^{-1} f(a) = e_H$ olduğundan $e_H f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ olup $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ olur. Yani $\forall a \in G$ için $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ olup istenen elde edilir.

Teorem 3.6.3. $f : G \to H$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde

(i) G nin her alt grubunun f altındaki görüntüsü H nin bir alt grubudur.

(ii) H nin her alt grubunun f altındaki ters görüntüsü G nin bir alt grubudur.

İspat: (i) G nin herhangi K alt grubunu alalım. $f(K) < H$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $K < G$ olduğundan $\varnothing \neq K \subset G$ olup $\varnothing \neq f(K) \subset H$ olur. Herhangi $x, y \in f(K)$ alalım. $x, y \in f(K)$ olduğundan $x = f(a)$ ve $y = f(b)$ olacak şekilde $\exists a, b \in K$ vardır. $a, b \in K$ ve $K < G$ olduğundan $ab^{-1} \in K$ olup $f(ab^{-1}) \in f(K)$ olur. Öte yandan f bir homomorfizma olduğundan ilgili teoremden $f(ab^{-1}) = f(a) f(b^{-1}) = f(a) f(b)^{-1} = xy^{-1}$ olur. O halde $xy^{-1} \in f(K)$ olup ilgili teoremden $f(K) < H$ olur.

(ii) H nin herhangi T alt grubunu alalım. $f^{-1}(T) < G$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $f: G \to H$ bir homomorfizma olduğundan ilgili teoremden $f(e_G) = e_H \in T$ olup $e_G \in f^{-1}(T)$ olur. O halde $f^{-1}(T) \neq \varnothing$ olur. Ayrıca $f^{-1}(T) \subset G$ olduğu da açıktır. Yani $\varnothing \neq f^{-1}(T) \subset G$ olur. Herhangi $a,b \in f^{-1}(T)$ alalım. $a,b \in f^{-1}(T)$ olduğundan $f(a), f(b) \in T$ olup $T < H$ olduğundan $f(a) f(b)^{-1} \in T$ olur. Öte yandan f bir homomorfizma olduğundan ilgili teoremden $f(ab^{-1}) = f(a) f(b^{-1}) = f(a) f(b)^{-1}$ olur. O halde $f(ab^{-1}) \in T$ olup $ab^{-1} \in f^{-1}(T)$ olur. Yani $\forall a,b \in f^{-1}(T)$ için $ab^{-1} \in f^{-1}(T)$ olup ilgili teoremden $f^{-1}(T) < G$ olur.

Sonuç 3.6.4. $f: G \to H$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda $f(G) < H$ olur.

İspat: $G < G$ olduğundan ilgili teoremden $f(G) < H$ olup istenen elde edilir.

Teorem 3.6.5. $f: G \to H$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde

(i) H nin her normal alt grubunun f altındaki ters görüntüsü G nin bir normal alt grubudur.

(ii) f örten ise G nin her normal alt grubunun f altındaki görüntüsü H nin bir normal alt grubudur.

İspat: (i) H nin herhangi T normal alt grubunu alalım. $f^{-1}(T) \lhd G$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $T \lhd H$ olduğundan $T < H$ olup bir önceki teoremden $f^{-1}(T) < G$ olur. Herhangi $a \in G$ ve herhangi $x \in f^{-1}(T)$ alalım. $a \in G$ ve $x \in f^{-1}(T)$ olduğundan $f(a) \in H$ ve $f(x) \in T$ olup $T \lhd H$ olduğundan $f(a)f(x)f(a)^{-1} \in T$ olur. Öte yandan f bir homomorfizma olduğundan $f\left(axa^{-1}\right) = f(a)f(x)f\left(a^{-1}\right) = f(a)f(x)f(a)^{-1}$ olur. O halde $f\left(axa^{-1}\right) \in T$ olup $axa^{-1} \in f^{-1}(T)$ olur. Yani $\forall a \in G$ ve $\forall x \in f^{-1}(T)$ için $axa^{-1} \in f^{-1}(T)$ olup ayrıca $f^{-1}(T) < G$ olduğundan tanımdan $f^{-1}(T) \lhd G$ olur.

(ii) f örten olsun. G nin herhangi K normal alt grubunu alalım. $f(K) \lhd H$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $K \lhd G$ olduğundan $K < G$ olup bir önceki teoremden $f(K) < H$ olur. Herhangi $a \in H$ ve herhangi $x \in f(K)$ alalım. $a \in H$ ve f örten olduğundan $f(b) = a$ olacak şekilde $\exists b \in G$ vardır. $x \in f(K)$ olduğundan $x = f(y)$ olacak şekilde $\exists y \in K$ vardır. $b \in G$, $y \in K$ ve $K \lhd G$ olduğundan $byb^{-1} \in K$ olup

$f\left(byb^{-1}\right)\in f\left(K\right)$ olur. Öte yandan $f:G\to H$ bir homomorfizma olduğundan ilgili teoremden $f\left(byb^{-1}\right)=f\left(b\right)f\left(y\right)f\left(b^{-1}\right)=f\left(b\right)f\left(y\right)f\left(b\right)^{-1}=axa^{-1}$ olur. O halde $axa^{-1}\in f\left(K\right)$ olup ayrıca $f\left(K\right)<H$ olduğundan tanımdan $f\left(K\right)\lhd H$ olur.

Tanım 3.6.6. $f:G\to H$ bir homomorfizma olsun. $f^{-1}(e_H)=\left\{a\in G\,\middle|\,f(a)=e_H\right\}$ kümesine f homomorfizmasının **çekirdeği** denir ve genellikle $Çekf$ ile gösterilir.

Teorem 3.6.7. $f:G\to H$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde f nin birebir olması için gerek ve yeter koşul $Çekf=\{e_G\}$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ f birebir olsun. $f:G\to H$ bir homomorfizma olduğundan ilgili teoremden $f\left(e_G\right)=e_H$ olup $e_G\in f^{-1}\left(e_H\right)=Çekf$ olur. Herhangi $x\in Çekf$ alalım. $x\in Çekf$ olduğundan $f\left(x\right)=e_H=f\left(e_G\right)$ olup f birebir olduğundan $x=e_G$ olur. O halde $Çekf=\{e_G\}$ olup istenen elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $Çekf=\{e_G\}$ olsun. $f(x)=f(y)$ olan herhangi $x,y\in G$ alalım. $f(x)=f(y)$ olduğundan $f(x)f(y)^{-1}=e_H$ olur. Öte yandan f bir homomorfizma olduğundan ilgili teoremden $f(xy^{-1})=f(x)f(y^{-1})=f(x)f(y)^{-1}$ olur. O halde $f(xy^{-1})=e_H$ olup $xy^{-1}\in f^{-1}(e_H)=Çekf=\{e_G\}$ olur. Bu durumda $xy^{-1}=e_G$ olup $x=y$ olur. Böylece f birebir olup istenen elde edilir.

Tanım 3.6.8. Birebir ve örten bir homomorfizmaya **bir izomorfizma (grup izomorfizması)** denir. Eğer G ve H grupları arasında en az bir izomorfizma varsa bu gruplara **izomorf gruplar** denir ve genellikle $G\cong H$ ile ifade edilir.

Not: İzomorf gruplar arasında birebir bir eşleme var ve grup yapıları da bu eşleme altında bozulmadığı için izomorfizma bir eşitlik gibi düşünülebilir.

Teorem 3.6.9. $f:G\to H$ bir izomorfizma ise $f^{-1}:H\to G$ dönüşümü bir homomorfizmadır (izomorfizmadır).
İspat: ÖDEV.

Teorem 3.6.10. G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in G$ için $\varphi(x) = Nx$ ile tanımlı $\varphi : G \to G/N$ dönüşümü bir örten homomorfizmadır. Ayrıca $Çek\varphi = N$ dir.

İspat: φ nin bir fonksiyon olduğu açıktır. $N \lhd G$ olduğundan φ nin tanımından $\forall a, b \in G$ için $\varphi(ab) = Nab = abN = aNbN = NaNb = \varphi(a)\varphi(b)$ olup φ bir homomorfizma olur. Herhangi $\overline{a} \in G/N$ alalım. $\overline{a} \in G/N$ olduğundan $\overline{a} = aN = Na$ olacak şekilde $\exists a \in G$ vardır. Burada φ nin tanımından $\varphi(a) = Na = \overline{a}$ olup φ örten olur.

$x \in G$ olmak üzere

$$x \in Çek\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = e_{G/N} \Leftrightarrow Nx = N = Ne \Leftrightarrow x \equiv e \pmod N \Leftrightarrow x = xe^{-1} \in N$$

denkliklerinden $Çek\varphi = N$ elde edilir.

Not: G bir grup ve $N \lhd G$ ise çekirdeği N olan en az bir homomorfizma vardır. Gerçekten yukarıda tanımlanan $\varphi : G \to G/N$ homomorfizması alınabilir.

HOMOMORFİZMA TEOREMİ: $f : G \to H$ bir homomorfizma ve $Çekf = N$ olsun. Bu durumda

(i) $N \lhd G$ dir.

(ii) $h \in H$ ve bir $a \in G$ için $f(a) = h$ ise $f^{-1}(h) = aN$ dir.

(iii) $G/N \cong f(G)$ dir.

İspat: (i) $f: G \to H$ bir homomorfizma ve $\{e_H\} \lhd H$ olduğundan ilgili teoremden $N = Çekf = f^{-1}(e_H) \lhd G$ olup istenen elde edilir.

(ii) $h \in H$ ve bir $a \in G$ için $f(a) = h$ olsun. Herhangi $x \in f^{-1}(h)$ alalım. $x \in f^{-1}(h)$ olduğundan $f(x) = h = f(a)$ olup $f(a)^{-1} f(x) = e_H$ olur. Ayrıca f bir homomorfizma olduğundan $f(a^{-1}x) = f(a)^{-1} f(x) = e_H$ olup $a^{-1}x \in Çekf = N$ olur. Bu durumda $x = aa^{-1}x \in aN$ olup

$$f^{-1}(h) \subset aN \quad \ldots (1)$$

olur. Herhangi $x \in aN$ alalım. $x \in aN$ olduğundan $x = an$ olacak şekilde $\exists n \in N$ vardır. $n \in N = Çekf$ olduğundan $f(n) = e_H$ olup f bir homomorfizma olduğundan $f(x) = f(an) = f(a) f(n) = f(a) e_H = f(a) = h$ olur. O halde $x \in f^{-1}(h)$ olup

$$aN \subset f^{-1}(h) \quad \ldots (2)$$

olur. (1) ve (2) den $f^{-1}(h)=aN$ olup istenen elde edilir.

(iii) $N \lhd G$ olduğundan G/N bölüm grubu tanımlıdır.

$$\overline{f}:G/N \to f(G), xN \to \overline{f}(xN)=f(x)$$

dönüşümünü tanımlayalım. $\overline{f}$ nin kapalı olduğu açıktır. $xN=yN$ olan herhangi $x,y \in G$ alalım. $x=xe \in xN=yN$ olduğundan $x=yn$ olacak şekilde $\exists n \in N$ vardır. $n \in N = Çekf$ olduğundan $f(n)=e_H$ olup f bir homomorfizma olduğundan $f(x)=f(yn)=f(y)f(n)=f(y)e_H=f(y)$ olur. O halde $\overline{f}$ iyi tanımlıdır. Böylece $\overline{f}$ bir fonksiyon olur. f bir homomorfizma olduğundan $\overline{f}$ nin tanımından $\forall aN, bN \in G/N$ için $\overline{f}(aNbN)=\overline{f}(abN)=f(ab)=f(a)f(b)=\overline{f}(aN)\overline{f}(bN)$ olup $\overline{f}$ bir homomorfizma olur. Herhangi $xN \in Çek\overline{f}$ alalım. $xN \in Çek\overline{f}$ olduğundan $f(x)=\overline{f}(xN)=e_H$ olup $x \in f^{-1}(e_H)=Çekf=N$ olur. $e^{-1}x=x \in N$ olduğundan $e \equiv_L x(\text{mod}\, N)$ olup $xN=eN=N=e_{G/N}$ olur. O halde $Çek\overline{f}=\{e_{G/N}\}$ olup ilgili teoremden $\overline{f}$ birebir olur. Herhangi $y \in f(G)$ alalım. $y \in f(G)$ olduğundan $y=f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in G$ vardır.

Burada $xN \in G/N$ elemanını alırsak $\overline{f}$ nin tanımından $\overline{f}\left(xN\right)=f\left(x\right)=y$ olup $\overline{f}$ örten olur. $\overline{f}:G/N \to f\left(G\right)$ birebir ve örten bir homomorfizma olduğundan tanımdan $\overline{f}$ bir izomorfizma olup $G/N \cong f\left(G\right)$ olur.

Sonuç $f:G\to H$ bir örten homomorfizma ise $N = Çekf$ olmak üzere $\varphi:G\to G/N,\ a\to\varphi\left(a\right)=aN$ ve $\overline{f}:G/N\to f(G)=H,\quad aN\to\overline{f}(aN)=f(a)$ fonksiyonları için $f=\overline{f}\circ\varphi$ dir. Burada φ örten homomorfizmasına **doğal homomorfizma** ve *f* nin böyle yazılışına da **doğal ayrışım** denir.

1. İzomorfizma Teoremi: $f:G\to\overline{G}$ örten bir homomorfizma, $Çekf=K$, $\overline{N}\lhd\overline{G}$ ve $N=f^{-1}(\overline{N})$ olsun. Bu takdirde $G/N\cong\overline{G}/\overline{N}\cong\dfrac{G/K}{N/K}$ olur.

İspat: $\overline{N}\lhd\overline{G}$ olduğundan $\overline{G}/\overline{N}$ bölüm grubu tanımlıdır. $\overline{N}\lhd\overline{G}$ olduğundan ilgili teoremden $N=f^{-1}(\overline{N})\lhd G$ olup G/N bölüm grubu tanımlıdır. Homomorfizma Teoreminden $K=Çekf\lhd G$ olup G/K bölüm grubu tanımlıdır. $\forall x\in K=Çekf$ için

$f(x)=e_{\overline{G}}\in\overline{N}$ olduğundan $x\in f^{-1}(\overline{N})=N$ olup $K\subset N$ olur. $K\lhd G$ ve $K<N<G$ olduğundan ilgili teoremden $K\lhd N$ olup N/K bölüm grubu tanımlıdır. $K<N\lhd G$ olduğundan ilgili teoremden $N/K\lhd G/K$ olup $\dfrac{G/K}{N/K}$ bölüm grubu tanımlıdır.

$$g:G\to\overline{G}/\overline{N},x\to g(x)=f(x)\overline{N}$$

dönüşümünü tanımlayalım. g nin bir fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca $f:G\to\overline{G}$ bir homomorfizma olduğundan g nin tanımından $\forall x,y\in G$ için $g(xy)=f(xy)\overline{N}=f(x)f(y)\overline{N}=f(x)\overline{N}f(y)\overline{N}=g(x)g(y)$ olup g bir homomorfizma olur. Herhangi $y\overline{N}\in\overline{G}/\overline{N}$ $\left(y\in\overline{G}\right)$ alalım. $y\in\overline{G}$ ve f örten olduğundan $f(x)=y$ olacak şekilde $\exists x\in G$ vardır. Burada g nin tanımından $g(x)=f(x)\overline{N}=y\overline{N}$ olup g örten ve dolayısıyla da $g(G)=\overline{G}/\overline{N}$ olur. $x\in G$ olmak üzere

$x\in Çekg\Leftrightarrow g(x)=e_{\overline{G}/\overline{N}}\Leftrightarrow f(x)\overline{N}=\overline{N}=e_{\overline{G}}\overline{N}\Leftrightarrow e_{\overline{G}}\equiv_L f(x)\left(\mathrm{mod}\,\overline{N}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=e_{\overline{G}}^{-1}f(x)\in\overline{N}\Leftrightarrow x\in f^{-1}\left(\overline{N}\right)=N$

denkliklerinden $Çekg = N$ elde edilir. O halde Homomorfizma Teoreminden $G/N \cong g(G) = \overline{G}/\overline{N}$ olur. Şimdi

$$h : G/K \to G/N, xK \to h(xK) = xN$$

dönüşümünü tanımlayalım. h nin kapalı olduğu açıktır. $xK = yK$ olan herhangi $x, y \in G$ alalım. $xK = yK$ olduğundan $x \equiv_L y(\bmod K)$ olup $x^{-1}y \in K$ olur. $x^{-1}y \in K$ ve $K \subset N$ olduğundan $x^{-1}y \in N$ olup $x \equiv_L y(\bmod N)$ olur. O halde $xN = yN$ olup h iyi tanımlıdır. Böylece $h : G/K \to G/N$ bir fonksiyon olur. h nin tanımından $\forall xK, yK \in G/K$ $(x, y \in G)$ için $h(xKyK) = h(xyK) = xyN = xNyN = h(xK)h(yK)$ olup $h : G/K \to G/N$ bir homomorfizma olur. Ayrıca $\forall xN \in G/N$ $(x \in G)$ için G/K nin xK elemanını alırsak h nin tanımından $h(xK) = xN$ olup h örten ve dolayısıyla da $h(G/K) = G/N$ olur. Herhangi $\overline{x} \in Çekh$ alalım. $\overline{x} \in Çekh$ ve $Çekh \subset G/K$ olduğundan $\overline{x} \in G/K$ olup $\overline{x} = xK$ olacak şekilde $\exists x \in G$ vardır. Burada $e_G N = N = e_{G/N} = h(\overline{x}) = h(xK) = xN$ olup $e_G \equiv_L x(\bmod N)$ olur. Bu durumda $x = e_G^{-1}x \in N$ olup $\overline{x} = xK \in N/K$ olur. Yani $\forall \overline{x} \in Çekh$ için $\overline{x} \in N/K$ olup

$$Çekh \subset N/K \quad \dots (1)$$

olur. Herhangi $\overline{x} \in N/K$ alalım. $\overline{x} \in N/K$ olduğundan $\overline{x} = xK$ olacak şekilde $\exists x \in N$ vardır. $e_G^{-1}x = x \in N$ olduğundan $e_G \equiv_L x(\operatorname{mod} N)$ olup $e_{G/N} = e_G N = xN$ olur. Ayrıca h nin tanımından $h(\overline{x}) = h(xK) = xN$ olur. O halde $h(\overline{x}) = e_{G/N}$ olup $\overline{x} \in Çekh$ olur. Yani $\forall \overline{x} \in N/K$ için $\overline{x} \in Çekh$ olup

$$N/K \subset Çekh \quad \dots (2)$$

olur. (1) ve (2) den $Çekh = N/K$ elde edilir. O halde Homomorfizma Teoreminden $\dfrac{G/K}{N/K} \cong h(G/K) = G/N$ olur. $\dfrac{G/K}{N/K} \cong G/N$ ve $G/N \cong \overline{G}/\overline{N}$ olduğundan $G/N \cong \overline{G}/\overline{N} \cong \dfrac{G/K}{N/K}$ olup istenen elde edilir.

2. İzomorfizma Teoremi: G bir grup, $H<G$ ve $K \lhd G$ olsun. Bu takdirde $HK=KH<G$ ve $H \cap K \lhd H$ olup $\dfrac{HK}{K} \cong \dfrac{H}{H \cap K}$ olur.

İspat: $\varnothing \neq HK \subset G$ olduğu açıktır. Herhangi $x, y \in HK$ alalım. $x, y \in HK$ olduğundan $x = h_1k_1$ ve $y = h_2k_2$ olacak şekilde $\exists h_1, h_2 \in H$ ve $\exists k_1, k_2 \in K$ vardır. $x = h_1k_1$ ve $y = h_2k_2$ olduğundan $xy^{-1} = h_1k_1\left(h_2k_2\right)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$ olur. Burada $h_1, h_2 \in H$ ve $H < G$ olduğundan $h_1h_2^{-1} \in H$ olur. $k_1, k_2 \in K$ ve $K < G$ olduğundan $k_1k_2^{-1} \in K$ olur. $h_2 \in H$ ve $H \subset G$ olduğundan $h_2 \in G$ olup ayrıca $k_1k_2^{-1} \in K$ ve $K \lhd G$ olduğundan tanımdan $h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in K$ olur. $h_1h_2^{-1} \in H$ ve $h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in K$ olduğundan $xy^{-1} = h_1h_2^{-1}h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in HK$ olur. Yani $\forall x, y \in HK$ için $xy^{-1} \in HK$ olup ilgili teoremden $HK < G$ olur. Bu durumda ilgili teoremden $HK = KH < G$ olur. Burada $e \in H$ olduğundan $\forall k \in K$ için $k = ek \in HK$ olup $K \subset HK$ olur. $K \lhd G$ ve $K < HK < G$ olduğundan ilgili teoremden $K \lhd HK$ ve $\dfrac{HK}{K} < G/K$ olur.

$H < G$ ve $K < G$ olduğundan ilgili teoremden $H \bigcap K < G$ olup $H \bigcap K \subset H$ olduğundan $H \bigcap K < H$ olur. Herhangi $a \in H$ ve herhangi $x \in H \bigcap K$ alalım. $x \in H \bigcap K$ olduğundan $x \in H$ ve $x \in K$ olur. $a \in H$ ve $H < G$ olduğundan $a \in G$ olup ayrıca $x \in K$ ve $K \lhd G$ olduğundan tanımdan $axa^{-1} \in K$ olur. Öte yandan $a, x \in H$ ve $H < G$ olduğundan

$axa^{-1} \in H$ olur. O halde $axa^{-1} \in H \bigcap K$ olur. Yani $\forall a \in H$ ve $\forall x \in H \bigcap K$ için $axa^{-1} \in H \bigcap K$ olup ayrıca $H \bigcap K < H$ olduğundan tanımdan $H \bigcap K \lhd H$ olur.

$$f : H \rightarrow \frac{HK}{K}, x \rightarrow f(x) = xK$$

dönüşümünü tanımlayalım. $e \in K$ olduğundan $\forall x \in H$ için $x = xe \in HK$ olup $xK \in \dfrac{HK}{K}$ olur. O halde f kapalıdır. f nin iyi tanımlı olduğu da açıktır. Yani f bir fonksiyondur. f nin tanımından $\forall x, y \in H$ için $f(xy) = xyK = xKyK = f(x) f(y)$ olup f bir homomorfizma olur. Herhangi $\overline{x} \in \dfrac{HK}{K}$ alalım. $\overline{x} \in \dfrac{HK}{K}$ olduğundan $\overline{x} = xK$ olacak şekilde $\exists x \in HK$ vardır. $x \in HK$ olduğundan $x = hk$ olacak şekilde $\exists h \in H$ ve $\exists k \in K$ vardır. $x = hk$ olduğundan $h^{-1}x = k \in K$ olup $h \equiv_L x (\operatorname{mod} K)$ ve buradan da $hK = xK = \overline{x}$ elde edilir. Burada f nin tanımından $f(h) = hK = \overline{x}$ olup f örten olur. $y \in H$ olmak üzere

$y \in Çekf \Leftrightarrow f(y) = e_{G/K} \Leftrightarrow yK = eK \Leftrightarrow e \equiv_L y (\operatorname{mod} K) \Leftrightarrow y = e^{-1}y \in K \Leftrightarrow y \in H \bigcap K$

denkliklerinden $\c{C}ekf = H \bigcap K$ olduğu anlaşılır. O halde Homomorfizma Teoreminden $H \bigcap K \lhd H$ ve $\dfrac{H}{H \cap K} \cong f(H) = \dfrac{HK}{K}$ olup $\dfrac{HK}{K} \cong \dfrac{H}{H \cap K}$ olur.

Teorem 3.6.10. Boştan farklı bir A kümesinin kendi üzerine birebir ve örten fonksiyonlar kümesini $S(A)$ ile gösterelim. Bu takdirde $S(A)$ kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: $I_A : A \rightarrow A$ özdeşlik fonksiyonu birebir ve örten olduğundan $I_A \in S(A)$ olup $S(A) \neq \varnothing$ olur. $\forall f, g \in S(A)$ için f ve g, A dan A ya birebir ve örten fonksiyonlar olduğundan Soyut Matematik Dersindeki ilgili teoremden $f \circ g : A \rightarrow A$ birebir ve örten bir fonksiyon olup $f \circ g \in S(A)$ olur. O halde fonksiyonlarda bileşke işlemi $S(A)$ da bir iç işlem olur.

Soyut Matematik Dersindeki ilgili teoremden $\forall f, g, h \in S(A)$ için $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ olup fonksiyonlarda bileşke işleminin $S(A)$ da birleşme özelliği vardır.

$I_A \in S(A)$ olduğunu gösterdik. Ayrıca Soyut Matematik Dersindeki ilgili teoremden $\forall f \in S(A)$ için $f \circ I_A = I_A \circ f = f$ olup I_A, $S(A)$ kümesinin fonksiyonlarda bileşke işlemine göre birim elemanı olur.

Herhangi $f \in S(A)$ alalım. $f \in S(A)$ olduğundan $f : A \to A$ birebir ve örten bir fonksiyon olup Soyut Matematik Dersindeki ilgili teoremden f fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1} : A \to A$ birebir ve örten bir fonksiyon olur. O halde $f^{-1} \in S(A)$ olur. Ayrıca Soyut Matematik Dersindeki ilgili teoremden $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$ olup f^{-1}, f nin $S(A)$da fonksiyonlarda bileşke işlemine göre tersi olur. Yani $S(A)$daki her elemanın $S(A)$da fonksiyonlarda bileşke işlemine göre tersi vardır.

Böylece $S(A)$ kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir grup olup istenen elde edilir.

Tanım 3.6.11. $S(A)$ nın bir alt grubuna **bir dönüşüm grubu** denir.

Cayley Teoremi: Her grup bir dönüşüm grubuna izomorftur.

İspat: G bir grup olsun. G nin bir dönüşüm grubuna izomorf olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $a \in G$ olmak üzere

$$T_a : G \to G, x \to T_a(x) = ax$$

dönüşümünü tanımlayalım. T_a nın bir fonksiyon olduğu açıktır. $T_a(x_1) = T_a(x_2)$ olan herhangi $x_1, x_2 \in G$ alalım. $T_a(x_1) = T_a(x_2)$ olduğundan $ax_1 = ax_2$ olup kısaltma özelliğinden $x_1 = x_2$ olur. O halde T_a birebir olur. Herhangi $y \in G$ alalım. $x = a^{-1}y$ diyelim. Burada $x \in G$ ve $T_a(x) = ax = aa^{-1}y = y$ olup T_a örten olur. $T_a : G \to G$ birebir ve örten bir fonksiyon olduğundan $T_a \in S(G)$ olur. Şimdi

$$\varphi : G \to S(G), a \to \varphi(a) = T_a$$

dönüşümünü tanımlayalım. φ nin bir fonksiyon olduğu açıktır. Herhangi $a, b \in G$ alalım. T_a, T_b ve T_{ab} nin tanımından $\forall x \in G$ için $T_{ab}(x) = abx = aT_b(x) = T_a(T_b(x)) = (T_a \circ T_b)(x)$ olup $T_{ab} = T_a \circ T_b$ olur. O halde φ nin tanımından $\varphi(ab) = T_{ab} = T_a \circ T_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ olup φ bir homomorfizma olur. Burada ilgili teoremden $\varphi(G) < S(G)$ olup tanımdan $\varphi(G)$ bir dönüşüm grubu olur. $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ olan herhangi $a_1, a_2 \in G$ alalım. $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$

olduğundan $T_{a_1} = T_{a_2}$ olup $T_{a_1}(e) = T_{a_2}(e)$ olur. Bu durumda $a_1 e = a_2 e$ olup $a_1 = a_2$ olur. O halde φ birebir olup $G \cong \varphi(G)$ olur. Böylece G bir dönüşüm grubuna izomorf olup istenen elde edilir.

SORULAR:

SORU: 1) $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ grubunun devirli olması için gerek ve yeter koşul $(m,n) = \text{OBEB}(m,n) = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(\Rightarrow)$ $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ grubu devirli olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = <(\overline{a}, \overline{b})>$ olacak şekilde $\exists (\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ vardır. Burada $\circ((\overline{a}, \overline{b})) = s(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) = mn$ olur. $k = \text{OKEK}(m,n)$ diyelim. Burada $m | k$ ve $n | k$ olup hem m modülüne göre, hem de n modülüne göre $\overline{k} = \overline{0}$ olur. O halde

$$k\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\underbrace{\left(\overline{a},\overline{b}\right)+\left(\overline{a},\overline{b}\right)+\ldots+\left(\overline{a},\overline{b}\right)}_{k\text{ tane}}=\left(\underbrace{\overline{a}+\overline{a}+\ldots+\overline{a}}_{k\text{ tane}},\underbrace{\overline{b}+\overline{b}+\ldots+\overline{b}}_{k\text{ tane}}\right)=\left(\overline{\underbrace{a+a+\ldots+a}_{k\text{ tane}}},\overline{\underbrace{b+b+\ldots+b}_{k\text{ tane}}}\right)=$$

$$=\left(\overline{ka},\overline{kb}\right)=\left(\overline{k}\cdot\overline{a},\overline{k}\cdot\overline{b}\right)=\left(\overline{0}\cdot\overline{a},\overline{0}\cdot\overline{b}\right)=\left(\overline{0},\overline{0}\right)$$

olup $\circ\left(\left(\overline{a},\overline{b}\right)\right)=mn$ olduğundan ilgili teoremden $mn\,|\,k$ olur. Öte yandan ilgili teoremden $k=\text{OKEK}(m,n)\,|\,mn$ olur. $mn\,|\,k$, $k\,|\,mn$ ve $k,mn\in\mathbb{Z}^+$ olduğundan $\text{OKEK}(m,n)=k=mn$ olur. Ayrıca ilgili teoremden $\text{OBEB}(m,n)\text{OKEK}(m,n)=mn$ olur. O halde $\text{OBEB}(m,n)mn=mn$ olup $(m,n)=\text{OBEB}(m,n)=1$ olur.

$(\Leftarrow)$ $(m,n)=\text{OBEB}(m,n)=1$ olsun. $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ nin $\left(\overline{1},\overline{1}\right)$ elemanını alalım. Herhangi $\left(\overline{a},\overline{b}\right)\in\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ alalım. $(m,n)=\text{OBEB}(m,n)=1$ olduğundan ilgili teoremden $mx+ny=1$ olacak şekilde $\exists x,y\in\mathbb{Z}$ vardır. $k=mxb+nya$ diyelim. Burada $k\in\mathbb{Z}$ ve

$$k\left(\bar{1},\bar{1}\right)=\left(k\bar{1},k\bar{1}\right)=\left(\bar{k},\bar{k}\right)=\left(\overline{mxb+nya},\overline{mxb+nya}\right)=\left(\overline{mxb}+\overline{ny}\cdot\bar{a},\overline{mx}\cdot\bar{b}+\overline{nya}\right)=$$

$$=\left(\bar{0}+\overline{\left(1-mx\right)}\cdot\bar{a},\overline{\left(1-ny\right)}\cdot\bar{b}+\bar{0}\right)=\left(\left(\bar{1}-\overline{mx}\right)\bar{a},\left(\bar{1}-\overline{ny}\right)\bar{b}\right)=\left(\left(\bar{1}-\bar{0}\right)\bar{a},\left(\bar{1}-\bar{0}\right)\bar{b}\right)=\left(\bar{1}\cdot\bar{a},\bar{1}\cdot\bar{b}\right)=\left(\bar{a},\bar{b}\right)$$

olup $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=k\left(\bar{1},\bar{1}\right)\in<\left(\bar{1},\bar{1}\right)>$ olur. O halde $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\subset<\left(\bar{1},\bar{1}\right)>$ olup ayrıca $<\left(\bar{1},\bar{1}\right)>\subset\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ olduğundan $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n=<\left(\bar{1},\bar{1}\right)>$ olur. Böylece $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ devirli olup istenen elde edilir.

SORU: 2) G bir grup ve $a,b\in G$ olsun. $\circ\left(a\right)=5$ ve $aba^{-1}=b^2$ ise $\circ\left(b\right)$ yi bulunuz.

Çözüm: $\circ\left(a\right)=5$ ve $aba^{-1}=b^2$ olsun. $aba^{-1}=b^2$ olduğundan

$$b^4=b^2b^2=aba^{-1}aba^{-1}=ab^2a^{-1}=aaba^{-1}a^{-1}=a^2ba^{-2}$$

olup

$$b^8=b^4b^4=a^2ba^{-2}a^2ba^{-2}=a^2b^2a^{-2}=a^2aba^{-1}a^{-2}=a^3ba^{-3}$$

olur. $b^8=a^3ba^{-3}$ ve $b^2=aba^{-1}$ olduğundan

$$b^{16}=b^8b^8=a^3ba^{-3}a^3ba^{-3}=a^3b^2a^{-3}=a^3aba^{-1}a^{-3}=a^4ba^{-4}$$

olup

$$b^{32}=b^{16}b^{16}=a^4ba^{-4}a^4ba^{-4}=a^4b^2a^{-4}=a^4aba^{-1}a^{-4}=a^5ba^{-5}$$

olur. Burada $\circ(a)=5$ olduğundan $a^5=a^{-5}=e$ olup $b^{32}=a^5ba^{-5}=ebe=b$ olur. $b^{32}=b$ olduğundan $b^{31}=e$ olup ilgili teoremden $\circ(b)|31$ olur. $\circ(b)|31$ ve 31 bir asal tamsayı olduğundan $\circ(b)=1$ veya $\circ(b)=31$ olur.

SORU: 3) G bir grup ve $a,b\in G$ olsun. a ve bab^{-1} elemanlarının mertebeleri sonlu ise $\circ(a)=\circ\left(bab^{-1}\right)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a ve bab^{-1} elemanlarının mertebeleri sonlu olsun. $\circ(a)=m$ ve $\circ\left(bab^{-1}\right)=n$ diyelim.

$\circ(a)=m$ olduğundan $a^m=e$ olup

$$\left(bab^{-1}\right)^m=\underbrace{\left(bab^{-1}\right)\left(bab^{-1}\right)\ldots\left(bab^{-1}\right)}_{m\text{ tane}}=b\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ tane}}\cdot b^{-1}=ba^mb^{-1}=beb^{-1}=bb^{-1}=e$$

olur. Bu durumda $m\in\mathbb{Z}^+$ ve $\circ\left(bab^{-1}\right)=n$ olduğundan $n\leq m$ olur. $\circ\left(bab^{-1}\right)=n$ olduğundan

$$e=\left(bab^{-1}\right)^n=\underbrace{\left(bab^{-1}\right)\left(bab^{-1}\right)\ldots\left(bab^{-1}\right)}_{\text{n tane}}=b\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n tane}}\cdot b^{-1}=ba^nb^{-1}$$

olup $a^n = b^{-1}ba^nb^{-1}b = b^{-1}eb = e$ olur. Bu durumda $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\circ(a) = m$ olduğundan $m \leq n$ olur. $m \leq n$ ve $n \leq m$ olduğundan $m = n$ olup $\circ(a) = \circ\left(bab^{-1}\right)$ olur.

SORU: 4) G bir değişmeli grup ve $a,b \in G$ olsun. $\circ(a) = m$, $\circ(b) = n$ ve $(m,n) = \text{OBEB}(m,n) = 1$ ise $\circ(ab) = mn$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\circ(a) = m$, $\circ(b) = n$ ve $(m,n) = \text{OBEB}(m,n) = 1$ olsun. $\circ(a) = m$ ve $\circ(b) = n$ olduğundan $a^m = b^n = e$ olup G değişmeli olduğundan $(ab)^{mn} = a^{mn}b^{mn} = \left(a^m\right)^n\left(b^n\right)^m = e^ne^m = e$ olur. $\circ(ab) = k$ diyelim. $(ab)^{mn} = e$, $mn \in \mathbb{Z}^+$ ve $\circ(ab) = k$ olduğundan $k \leq mn$ olur. $\circ(ab) = k$ olduğundan $(ab)^k = e$ olup G değişmeli olduğundan $e = (ab)^k = a^kb^k$ olur. $a^kb^k = e$ olduğundan $a^k = b^{-k}$ olup $a^{nk} = \left(a^k\right)^n = \left(b^{-k}\right)^n = b^{-kn} = \left(b^n\right)^{-k} = e^{-k} = e$ olur. $\circ(a) = m$ ve $a^{nk} = e$ olduğundan ilgili teoremden $m \mid nk$ olup $(m,n) = \text{OBEB}(m,n) = 1$ olduğundan ilgili teoremden $m \mid k$ olur. $a^kb^k = e$ olduğundan $b^k = a^{-k}$ olup $b^{mk} = \left(b^k\right)^m = \left(a^{-k}\right)^m = a^{-km} = \left(a^m\right)^{-k} = e^{-k} = e$ olur.

$\circ(b)=n$ ve $b^{mk}=e$ olduğundan ilgili teoremden $n|mk$ olup $(m,n)=\text{OBEB}(m,n)=1$ olduğundan ilgili teoremden $n|k$ olur. $m|k$, $n|k$ ve $(m,n)=\text{OBEB}(m,n)=1$ olduğundan ilgili teoremden $mn|k$ olur. $mn|k$ ve $mn,k\in\mathbb{Z}^+$ olduğundan $mn\le k$ olup ayrıca $k\le mn$ olduğundan $\circ(ab)=k=mn$ olur ki bu da istenendir.

SORU: 5) $m\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_m$ kümesinin + işlemine göre bir değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm: ÖDEV.

SORU: 6) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$ direkt çarpım grubunun devirli olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: ÖDEV.

SORU: 7) $f:G\to H$ bir örten homomorfizma olsun. Eğer $Çekf$, G nin bir maksimal normal alt grubu ise H nin basit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $Çekf$, G nin bir maksimal normal alt grubu olsun. Bu durumda ilgili teoremden $G/Çekf$ basit olur. Öte yandan $f:G\to H$ bir örten homomorfizma olduğundan Homomorfizma Teoreminden $G/Çekf \cong f(G)=H$ olur. O halde H basit olup istenen elde edilir.

SORU: 8) $f:G\to H$ bir homomorfizma olsun. Eğer G basit ise f nin ya birebir ya da $\forall a\in G$ için $f(a)=e_H$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: G basit olsun. Homomorfizma Teoreminden $Çekf \lhd G$ olur. G basit ve $Çekf \lhd G$ olduğundan $Çekf=\{e_G\}$ veya $Çekf=G$ olur. Eğer burada $Çekf=\{e_G\}$ ise ilgili teoremden f birebir olur. Eğer $Çekf=G$ ise $\forall a\in G$ için $a\in Çekf$ olup $f(a)=e_H$ olur.

SORU: 9) $m\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z}_m,+), a\to f(a)=\overline{a}$ ile tanımlı f dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu gösteriniz ve $Çekf$ yi bulunuz.

Çözüm: f nin bir fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca f nin tanımından $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y)$ olup f bir homomorfizmadır. $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x \in \c{C}ekf \Leftrightarrow f(x) = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid x - 0 = x \Leftrightarrow x \in m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

denkliklerinden $\c{C}ekf = m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ elde edilir.